Научная статья

УДК 37.01/.09

ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА БАЗЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ, ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ОЦЕНКИ ИНТЕНСИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ В ПЕДАГОГИКЕ

Алексей Иванович Примакин[1], Сергей Алексеевич Сахнов[2], Наталья Геннадьевна Грачева[3]

[1, 2]Академия войск национальной гвардии, Санкт-Петербург, Россия

[3]Санкт-Петербургский университет МВД России, Санкт-Петербург, Россия

[1] a.primakin@mail.ru

[2] sakhnov_1992@mail.ru

[3] kng25@list.ru

Аннотация. Статья посвящена динамико-математическим моделям, применяемым для анализа и прогнозирования образовательных процессов. Рассматриваются методы, позволяющие эффективно оценивать и предсказывать результаты образовательной деятельности, а также их влияние на качество обучения. Основная цель заключается в разработке и применении математических моделей, которые помогут в анализе динамики образовательных процессов и их прогнозировании. В работе используется модель Вальтера-Лотки, что позволяет более точно моделировать образовательные процессы. В результате исследования выявлены ключевые факторы, влияющие на эффективность образовательных процессов, а также предложены рекомендации по их оптимизации. Полученные результаты имеют практическое значение для образовательных учреждений, позволяя улучшить качество обучения и адаптировать образовательные программы к потребностям курсантов.

Ключевые слова: модель, обучение, оценка, знание, скорость, стресс, интенсивность, оптимизация

Для цитирования: Примакин А.И., Сахнов С.А., Грачева Н.Г. Построение динамико-математических моделей на базе системы дифференциальных уравнений для описания, прогнозирования и оценки интенсивности обучения в педагогике // Вестник Военной академии войск национальной гвардии. 2025. № 3 (32). С. 326–338. URL: https://vestnik-spvi.ru/2025/09/032.pdf.

Original article

BUILDING DYNAMIC AND MATHEMATICAL MODELS BASED ON A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS TO DESCRIBE, FORECAST, AND EVALUATE THE INTENSITY OF LEARNING IN PEDAGOGY

Alexey I. Primakin[1], Sergey A. Sakhnov[2], Natalia G. Gracheva[3]

[1, 2]Academy of the National Guard Troops, Saint-Petersburg, Russia

[3]Saint Petersburg University of the Ministry of the Interior of Russia, Saint-Petersburg, Russia

[1]a.kosolapov@mail.ru

[2]a.primakin@mail.ru

[3]kng25@list.ru

Abstract. The article is devoted to dynamic mathematical models used for analyzing and forecasting educational processes. It examines methods that allow for effective evaluation and prediction of educational activities, as well as their impact on the quality of education. The main goal is to develop and apply mathematical models that can help in analyzing the dynamics of educational processes and their forecasting. The article uses the Walther-Lotka model, which allows for more accurate modeling of educational processes. The research identifies key factors that influence the effectiveness of educational processes and provides recommendations for their optimization. The results obtained are of practical importance for educational institutions, allowing them to improve the quality of education and adapt educational programs to the needs of students.

Keywords: model, training, evaluation, knowledge, speed, stress, intensity, optimization

For citation: Primakin A.I., Sakhnov S.A., Gracheva N.G. Building dynamic and mathematical models based on a system of differential equations to describe, forecast, and evaluate the intensity of learning in pedagogy. Vestnik Voennoj akademii vojsk nacional’noj gvardii. 2025;3(32): 326–338. (In Russ.). Available from: https:// vestnik-spvi.ru/2025/09/032.pdf.

Введение

Актуальность статьи продиктована необходимостью математического описания динамики педагогического процесса с целью обоснования и определения оптимального уровня интенсивности обучения курсантов. Для решения этой задачи требуется подобрать математический инструментарий, который бы позволил учитывать и описывать динамику изучаемого процесса. В статье акцент сделан на возможности применения систем дифференциальных уравнений, которые позволяют в математической форме описывать, анализировать и прогнозировать особенности образовательного процесса, в том числе, обеспечивая оценку интенсивности обучения. Данные математические модели (назовем их – «динамико-математические модели») выявляют функциональные зависимости между факторами, влияющими на педагогический процесс, временем обучения, усилиями курсантов и их психологическими особенностями, что, в конечном итоге, позволяет оптимизировать учебные программы, а также педагогические методы и технологии.

В процессе создания динамико-математических моделей формируются системы дифференциальных уравнений, коэффициенты в которых определяются с помощью применения статистических методов в ходе обработки результатов тестирования обучающихся по выявлению особенностей восприятия ими учебного материала.

Адекватность сформированной динамико-математической модели реальным процессам обеспечивает объективное прогнозирование результатов обучения и обоснованные рекомендации учебным заведениям силовых структур по улучшению и повышению эффективности образовательного процесса.

Применение динамико-математических моделей позволяет выявить и наметить пути устранения некоторых противоречий, складывающихся в области теории и практики образовательного процесса.

Целесообразно, в рамках данной статьи, привести некоторые из возможных противоречий, которые проявляются в ходе обучения курсантов и требуют своего разрешения или поиска некоторого компромисса.

1. Педагогическая практика отмечает две противоположные точки зрения относительно длительности проводимых учебных занятий и объема доводимой на них информации – иногда короткие, но более интенсивные занятия дают лучший результат в сравнении с длительными занятиями, на которых объем излагаемого учебного материала растянут во времени. Выбор той или иной методики определяется мотивацией и уровнем подготовки обучающихся. Данное противоречие можно условно определить, как «количество против качества».

2. Как известно, курсанты обладают разными способностями к восприятию учебного материала – одни легко воспринимают учебную информацию, доводимую до них в высоком темпе, для других обучающихся – это неприемлемо. Данный факт иллюстрирует противоречие между универсальными методами обучения и индивидуальным подходом в процессе подготовки курсантов.

3. Существует противоречие между практическими навыками курсантов и их теоретической подготовкой. Ситуация, когда теоретические знания легко усваиваются, но вызывает затруднение применение их на практике, требует снижения общей интенсивности обучения.

4. Наблюдается противоречие между высоким уровнем интенсивности проводимых занятий и возможным, в этом случае, опасением за психоэмоциональное состояние обучающихся. Педагогическая практика показывает, что чрезмерно высокая интенсивность проводимых занятий с большим объемом учебной информации приводит к выгоранию курсантов, что снижает их мотивацию и интерес к обучению. Эту особенность можно охарактеризовать противоречием между учебной нагрузкой и мотивацией к обучению.

5. Широкое внедрение в педагогический процесс компьютерных технологий и мультимедийных средств, повсеместная цифровая трансформация, способны повысить интенсивность обучения, предлагая новые методы и ресурсы. Однако в противоречие с новациями вступают традиционные педагогические методы и технологии, которые сохраняют свою ценность и в ряде ситуаций продолжают сохранять свою ценность и результативность. Наблюдае-

мое в этом случае противоречие – это противоречие между традиционными и цифровыми (компьютерными) технологиями.

6. Отметим еще одно противоречие, которое наблюдается на заключительно этапе обучения – оценка знаний курсантов, которая, как правило, основывается на количественных показателях. Однако не всегда выставленная на экзамене оценка соответствует истинным знаниям и практическим навыкам курсантов. Таким образом, можно отметить противоречие между формальными оценками и действительным уровнем усвоения обучающимися учебного материала.

Представленные противоречия, сопровождающие учебный процесс, говорят о сложности и необходимость комплексного подхода к его организации, описании и прогнозировании результатов, что достигается в результате формирования и применения динамико-математических моделей.

Основные положения

Динамико-математические модели представляют собой математические конструкции, которые в дифференциальной форме описывают изменения и взаимодействия различных переменных во времени. Подобные модели находят применение при описании явлений, суть которых может быть определена, как некоторое «противоборство», подчиняющееся закону диалектики – «единство и борьба двух противоположностей». Область применения динамико-математических моделей для описания ситуации «конфликта» широка: биология, экономика, решение задач военного противоборства и то, что нас интересует в рамках настоящей статьи – педагогические процессы.

Перечислим и дадим краткую характеристику основных структурных компонентов динамико-математических моделей.

Первый компонент – это переменные, изменяющиеся во времени. В контексте педагогических процессов это могут быть переменные, отражающие уровень знаний курсантов; время, затраченное на обучение, и интенсивность учебной деятельности. Каждую переменную можно представить, как одну из сторон ситуации «конфликта», ситуации «противоборства».

Следующая структурная единица – уравнения. Динамико-математические модели часто описываются с помощью дифференциальных уравнений, которые демонстрируют, как переменные изменяются в зависимости от времени, внутренних закономерностей и внешних факторов. Например, уравнение может описывать изменение уровня знаний курсантов в зависимости от времени и интенсивности обучения.

Третий компонент связан с начальными и граничными условиями. Для решения системы дифференциальных уравнений (задача Коши) необходимо задать начальные условия (например, начальный уровень знаний курсантов) и, в некоторых случаях, граничные условия (например, максимальное время, отводимое на обучение).

Еще одна составляющая динамико-математических моделей – это вид зависимостей переменных изучаемого динамического процесса, которые могут быть представлены в линейной или нелинейной форме. Линейные модели предполагают пропорциональные изменения, тогда как нелинейные могут учитывать более сложные взаимодействия и эффекты.

Одной из основных целей при формировании динамико-математических моделей является прогнозирование будущих состояний системы. В образовательном контексте это может означать предсказание результатов обучения на основе текущих данных.

Построенная динамико-математическая модель позволяет исследовать, как изменения в одной или нескольких переменных влияют на результаты. Это может помочь в выявлении ключевых факторов, влияющих на интенсивность обучения. Данный структурный функционал динамико-математических моделей можем определить, как инструментарий анализа чувствительности модели.

В ходе динамического моделирования необходимо предусмотреть возможность визуализации результатов прогнозирования. Данный функционал динамико-математических моделей реализуется с помощью графиков и диаграмм, что позволяет лучше понять динамику процессов и взаимодействия между переменными.

В области образования динамико-математические модели могут применяться для оптимизации учебных планов, оценки эффективности различных методов обучения, а также для разработки адаптивных образовательных технологий. Таким образом, динамико-математические модели являются мощным инструментом для анализа и прогнозирования процессов, что делает их особенно актуальными в контексте оценки интенсивности обучения.

Сформулируем цель данной статьи: определить оптимальный уровень интенсивности обучения путем динамико-математического моделирования.

Среди наиболее популярных динамико-математических моделей в обучении выделяются модели, такие как модель Вальтера-Лотки, модели нелинейной динамики и экономико-математические модели. Эти модели помогают понять сложные системы и взаимодействия, развивая навыки анализа и прогнозирования.

Модель Вальтера-Лотки: используется для изучения взаимодействия между хищниками и жертвами, демонстрируя циклы популяций и их динамику [1].

Модель Холлинга-Таннера – это классическая математическая модель в экологии, описывающая динамику взаимодействия двух видов: хищника и жертвы. Она является модификацией и развитием более простой модели Вальтера-Лотки, но включает два важных биологически реалистичных аспекта:

– насыщение хищника (функциональный ответ Холлинга II типа): скорость потребления жертв одним хищником увеличивается с ростом численности жертвы, но достигает максимума (насыщается) из-за ограниченного времени на поиск, поимку и поедание жертвы;

– внутривидовая конкуренция у хищника (или самоограничение): рост популяции хищника ограничен не только количеством доступной пищи (жертв), но и другими факторами, такими как территория, конкуренция за другие ресурсы или социальные взаимодействия. Это предотвращает неограниченный рост хищников даже при обилии жертв [2, 3].

Модель Холлинга-Таннера – это важный инструмент в экологии, позволяющий более реалистично, чем модель Вальтера-Лотки, описывать динамику взаимодействия хищника и жертвы за счет учета ограниченной способности хищников потреблять жертв (насыщение) и конкуренции внутри популяции хищников. Она предсказывает возможность устойчивого сосуществования видов или вымирания хищника в зависимости от параметров системы.

Модель Лоренца: применяется в теории хаоса для анализа динамических систем, таких как атмосферные явления, и помогает понять непредсказуемость в сложных системах [4].

Модели роста населения: включают экспоненциальные и логистические модели, которые помогают анализировать изменения в численности населения и ресурсообеспеченности [5, 6].

Экономические модели: такие как модели спроса и предложения, которые иллюстрируют взаимодействие между потребителями и производителями на рынке [7].

Модели распространения заболеваний: например, модели SIR (Susceptible-Infected-Recovered), которые используются для анализа эпидемий и распространения инфекционных заболеваний [8, 9].

В данной работе будет рассматриваться применение модели Вальтера-Лотки. Несмотря на то, что, изначально она применялась в биологии, её можно адаптировать для анализа процессов в других областях, включая обучение и педагогику.

Модель Вальтера-Лотки – это математическая модель, описывающая динамику взаимодействия двух видов в экосистеме, обычно хищника и жертвы. Часто ее называют моделью взаимодействия «хищник-жертва».

Уравнения модели «хищник-жертва» имеет вид (1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x - \beta \cdot x \cdot y \\ \frac{dy}{dt} = \delta \cdot x \cdot y - \gamma \cdot y \end{cases}, \qquad (1)$$

где: x – количество «жертв»; y – количество «хищников»; α, β, γ, δ – параметры взаимодействия между переменными и внешними факторами.

Первое равенство в системе дифференциальных уравнений (1) характеризует динамику роста популяции «жертв», а второе дифференциальное уравнение – рост популяции «хищников».

Динамико-математическая модель (1) показывает циклические колебания переменных x и y: когда «жертв» x много, «хищники» y размножаются, но затем их численность («хищников») падает из-за нехватки пищи, что позволяет «жертвам» (x) увеличивать свою популяцию.

Рассмотрим применение динамико-математической модели применительно к педагогическому процессу, полагая в качестве «жертв», т. е. x – знания, навыки, мотивацию обучающихся; а «хищниками», т. е. y – забывание, усталость, стресс, отвлекающие факторы, мешающие постижению знаний.

Целесообразно рассмотреть ряд этапов, поясняющих логику соответствия особенностей педагогического процесса предлагаемой динамико-математической модели.

1. Динамика усвоения знаний:

– в ситуации, когда курсант активно учится, x растёт; «забывание» y сначала отстаёт, но потом накапливается и мешает процессу усвоения знаний (например, из-за перегрузки);

– после снижения нагрузки x падает, «забывание» уменьшается, и цикл повторяется.

Вывод: Необходимо дозировать учебную нагрузку, чтобы избежать резких спадов продуктивности.

2. Баланс теоретических знаний и практических навыков:

– теоретические знания x без применения в практической сфере обнуляются «забыванием» y;

– применение теоретических знаний к практике (δ, x, y) помогает лучше освоить и закрепить учебный материал; снижает его «забывание».

Вывод: Чем больше доля практических занятий в учебном плане, тем эффективней процесс понимания курсантами учебного теоретического материала, тем надежней и дольше удерживаются сформировавшиеся у обучающихся знания.

3. Конкуренция мотивации и прокрастинации (склонности откладывать важные дела на «потом»):

– если мотивация x высока, то курсант учится эффективно, степень усвоения учебного материала высокая;

– однако со временем наблюдается рост прокрастинации, y растёт, что приводит к снижению результативности обучения и, в целом, приводит к жизненным проблемам и болезненным психологическим эффектам.

Вывод: Нужны перерывы и методы борьбы с прокрастинацией, например, поддерживать и поощрять активность курсантов на занятии.

4. Поиск оптимального соотношения в ходе проведения учебных занятий между групповой (сразу со всеми курсантами) и индивидуальной (с наиболее сильными обучающимися) работой:

– если в ходе проведения занятий или в часы самостоятельной подготовки курсанты с высоким уровнем знаний и ответственности (x) помогают слабым обучающимся, то общий уровень освоения учебного материала (y) растёт (аналог увеличения количества «жертв»);

– в ситуации, когда в учебной группе слабо подготовленных курсантов (y) большинство, а именно на них направлено внимание преподавателя, курсантам с высоким уровнем знаний (x) на подобных занятиях становится скучно, понимание ими нового материала происходит быстро, их внимание на занятии ослабевает (аналог увеличения количества «хищников»).

Вывод: В ходе проводимых учебных занятий преподавателю необходимо балансировать групповую работу с индивидуальным подходом к обучающимся, например, выдачей индивидуальных заданий.

Выделим ряд гипотез, которые в последующем подтвердим или опровергнем по результатам построения и исследования динамико-математической модели в интегрированном математическом пакете Mathcad [10, 11].

В этой же программе визуализируем модель Вальтера-Лотки, что позволит провести анализ цикличности процессов обучения и оценить баланс между существующими противоречиями в педагогической сфере:

– нагрузкой и отдыхом;

– теорией и практикой;

– мотивацией и контролем отвлекающих факторов.

Поставим в соответствие биологическим переменным модели «жертва»-«хищник» Вальтерра-Лотки (1) показатели и коэффициенты, связанные с образовательным процессом:

$x(t)$ – уровень знаний/навыков обучающегося (аналог «жертв»);

$y(t)$ – уровень забывания, усталости или стресса (аналог «хищников»);

α – скорость естественного усвоения знаний курсантом (без внешних раздражителей – усталости или стресса);

β – коэффициент подавления знаний из-за стресса/перегрузки;

δ – коэффициент закрепления знаний в рамках практических занятий (влияние x, y);

γ – скорость естественного забывания знаний (при условии отсутствия повторения учебного материала).

Соответственно система дифференциальных уравнений (1) примет вид (2):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x - \beta \cdot x \cdot y \\ \frac{dy}{dt} = \delta \cdot x \cdot y - \gamma \cdot y \end{cases}. \qquad (2)$$

Первое равенство в системе дифференциальных уравнений (2) характеризует динамику роста знаний у курсантов, а второе равенство – усиление процесса «забывания» (ухудшение процесса «понимания») знаний в результате воздействия внешних факторов: стресса или перегрузки.

Важно отметить, что системы (1) и (2) по своей структуре и внешнему виду совершенно одинаковые, но различаются трактовкой переменных (x, y) и коэффициентов $(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$, каждые из которых отражают именно свою предметную область: система (1) – биология; система (2) – педагогический процесс со своей спецификой решаемой задачи.

Представим интерпретацию коэффициентов системы дифференциальных уравнений (2) и методики их количественной оценки.

Для определения коэффициента α (коэффициент интенсивности освоения учебного материала) целесообразно воспользоваться формулой (3), которая позволяет оценить, как быстро курсант решает задачи без нагрузки (без учета внешних раздражителей – стресса или усталости), например, тесты «до» или «после» изучения определенной темы учебного занятия:

$$\alpha \approx \frac{\ln(x_1/x_0)}{t}, \qquad (3)$$

где: x_1, x_0 – уровень знаний курсанта в начале и в конце периода обучения t.

Для определения коэффициента β (уровень влияние внешних раздражителей – стресса или усталости на интенсивность понимания и освоения нового учебного материала – формирование новых знаний) проводится эксперимент, когда в ходе интенсивной учебной нагрузки оценивается падение продуктивности.

Описание эксперимента

Для измерения падения продуктивности при интенсивной нагрузке в обучении можно использовать методику контролируемого перегруза с последующим анализом динамики эффективности.

1. Создать условия, при которых когнитивные ресурсы учащегося будут истощаться, чтобы зафиксировать момент снижения продуктивности.

Для этого применимы следующие способы:

– увеличение объема материала для резкого повышение количества информации за единицу времени;

– усложнение за счет введения задач на границе или за пределами текущих возможностей (например, переход на следующий уровень сложности);

– сокращение времени на выполнение заданий;

– многозадачность, как одновременное выполнение нескольких когнитивно сложных действий (например, изучение нового материала + решение задач + запоминание);

– эмоциональный стресс путем добавления элементов давления (например, соревновательный элемент, публичные выступления).

2. Замер продуктивности ДО, во время и ПОСЛЕ нагрузки.

Чтобы выявить падение, нужны контрольные точки (метрики) и регулярные замеры.

Применяются следующие метрики продуктивности:

Скорость – время на выполнение задания, количество решенных задач в единицу времени.

Качество – точность ответов, количество ошибок, глубина понимания (опрос, объяснение).

Когнитивная усталость – субъективная оценка усталости (шкала от 1 до 10), скорость реакции (тесты на внимание).

Мотивация – уровень вовлеченности, желание продолжать (анкетирование, наблюдение).

Существуют следующие схемы замера:

1. Базовый уровень (ДО нагрузки):

– замерить обычную продуктивность (например, скорость решения 10 задач + % ошибок);

– оценить мотивацию и когнитивное состояние.

2. Интенсивная фаза (нагрузка):

– дать повышенную нагрузку (например, в 2 раза больше материала за то же время);

– фиксировать показатели каждые 15–30 минут (падение скорости, рост ошибок);

3. Критическая точка (срыв продуктивности):

– определить момент, когда: количество ошибок возрастает на >30 %, скорость падает на >40 %.

– учащийся демонстрирует признаки усталости (рассеянность, раздражение).

4. Восстановительная фаза (после нагрузки):

– продолжать замеры после снижения нагрузки, чтобы увидеть, как быстро возвращается продуктивность.

Например, если при некотором уровне стресса или усталости (допустим, при $y = 1$) понимание (или освоение) нового учебного материала понижается на 20 % в течение одного часа, то можно считать, что $\beta \approx 0{,}2$.

Чтобы дополнительно обосновать снижение знаний на 20 % при стрессовой ситуации в рамках модели Вальтера-Лотки, нужно обратиться к нейрофизиологическим, когнитивным и педагогическим исследованиям.

Нейрофизиологическое обоснование влияния стресса на деятельность мозга:

– гормональный механизм:

При стрессе выделяется кортизол, который подавляет активность префронтальной коры (отвечает за сложное мышление, память) и усиливает работу амигдалы (эмоции, реакция «бей или беги»). Исследования (Arnsten, 2009) [12] показывают, что высокий кортизол снижает когнитивные функции на 15–25 %;

– ухудшение нейропластичности:

Стресс тормозит синтез BDNF (белка, необходимого для формирования нейронных связей).

Эксперименты на студентах (Lupien et al., 2005) [13] подтверждают падение эффективности обучения на 18–22% при экзаменационном стрессе.

Когнитивные механизмы, объясняющие, как стресс «крадёт» ресурсы:

– снижение рабочей памяти:

Стресс сокращает объём рабочей памяти (R. G. Morrison, 2013) [14]. Вместо 7±2 объекта мозг удерживает на 20 % меньше информации (5-6 объектов).

Решение математической задачи требует удержания промежуточных результатов – при стрессе ошибки возрастают на 15–25 %.

– туннельное мышление:

Стресс фокусирует внимание на угрозе, а не на учебной задаче.

Исследования (Eysenck, 2007) [15] фиксируют потерю 20–30 % когнитивных ресурсов на борьбу с тревогой.

Долгосрочный стресс (данные онлайн-курсов):

При высокой учебной нагрузке (дедлайны + многозадачность) курсанты:

– забывали 22 % материала через 48 часов (против 8 % в норме).

– допускали на 17–25 % больше ошибок в тестах.

Связь с параметром модели Вальтеры-Лотки:

В уравнении $\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x - \beta \cdot x \cdot y$ элемент $\beta \cdot x \cdot y$ – член, описывающий потерю знаний из-за стресса y, так если стресс $y = 1$ (условная единица), а знания $x = 100\,\%$, то $\beta \cdot x \cdot y = \beta \cdot 100\,\% \cdot 1 = 20\,\%$.

Физический смысл β – доля знаний, теряемая в единицу времени при единичном уровне стресса.

Почему будем применять в модели именно $\beta = 20\%$? Это средний показатель для умеренного стресса, подтверждённый метаанализами (например, Vogel & Schwabe, 2016) [16]:

– легкий стресс: падение на 5–10 %;

– умеренный стресс (экзамены, дедлайны): 15–25 %;

– хроническая стрессовая ситуация: до 40 % и выше (выгорание).

Покажем, как можно измерить индивидуальный коэффициент β.

Дадим курсанту тест ДО и ПОСЛЕ стрессовой нагрузки (например, при ограничении времени).

$\beta = \frac{\text{Потеря знаний,\%}}{y \cdot x}$ (при $y = 1$, шкала стресса)

Оптимизация обучения:

Если $\beta > 0{,}2$ – обучающийся чувствителен к стрессу.

Необходимо снижать нагрузку (y) или вводить техники релаксации (снижают y на 30-50%).

Таким образом, уверенно можно утверждать, что значение коэффициента $\beta \approx 0{,}2$ (коэффициента, отражающего степень влияния стресса на способность восприятия курсантом учебного материала) – не абстракция, а усреднённый эмпирический факт, отражающий биологические ограничения мозга. В модели Вальтера-Лотки (2) коэффициент β помогает количественно оценить риски перегрузки и обосновывает необходимость в оптимизации («балансировке») учебного процесса.

Для определения коэффициента δ, отражающего эффективность практики, повышающей способность курсантов к восприятию и пониманию учебного материала, проводится эксперимент по замеру уровня снижения «забывания» полученных знаний [17, 18]. Например, если после одного часа решения заданий «забывание» y уменьшилось на 30 %, то можно считать, что $\delta \approx 0{,}3$.

Для определения коэффициента γ, характеризующего скорость «забывания» полученных знаний, проводится тест, результаты которого применяются в формуле (4):

$$\gamma \approx \frac{\ln(x_0/x_1)}{t}, \qquad (4)$$

где t – временной интервал измерения «забывания», когда полученные знания (без их повторения) «уменьшились» с x_0 до x_1.

Расчет интенсивности обучения оценивается через дифференциал переменной x: $(\frac{dx}{dt})$.

Физический смысл первого равенства системы дифференциальных уравнений (2) следующий: чем выше $\alpha \cdot x$ (естественное усвоение курсантом учебного материала) и меньше $\beta \cdot x \cdot y$ (влияние стрессовой ситуации на усвоение курсантом учебного материала), тем эффективней осуществляется педагогический процесс.

Для нахождения максимальной интенсивности прироста знаний воспользуемся равенством $\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x - \beta \cdot x \cdot y$, взяв от его правой части производную и прировняв ее нулю: $\alpha - \beta \cdot y = 0$. Откуда $y_{\text{опт.}} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Такую же математическую операцию проделаем со вторым равенством системы дифференциальных уравнений (2): $\delta \cdot x - \gamma = 0$, откуда $x_{\text{опт.}} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Таким образом, удалось получить точку стационарности педагогического процесса (баланс знаний и «забывания»):

$$\begin{cases} x_{\text{опт.}} = \frac{\gamma}{\delta} \\ y_{\text{опт.}} = \frac{\alpha}{\beta}. \end{cases} \qquad (5)$$

Оптимальная интенсивность педагогического процесса достигается, когда усвоение знаний x высокое, а уровень стрессовой ситуации y низок.

Графическое представление решения системы дифференциальных уравнений (2) позволяет визуализировать и оценить возможную амплитуду колебаний, которая отражает уровень стабильности (когда амплитуда невысокая) педагогического процесса [19, 20]. Чем больше амплитуда колебаний переменных x и y, тем неустойчивей педагогический процесс.

Удобным программным инструментарием для решения и визуализации системы дифференциальных уравнений (2) является интегрированный математический пакет Mathcad [21].

Приведем пример решения рассматриваемой выше задачи при следующих начальных условиях.

Исходные данные по степени усвоения учебного материала курсантами [22]:

– скорость естественного усвоения знаний курсантами (без внешних раздражителей): коэффициент $\alpha \approx 0{,}1$, т. е. знания увеличиваются на 10 % в день;

– в условиях стрессовой ситуации усвоение знаний курсантами понижается на 15 %, т. е. коэффициент $\beta \approx 0{,}15$;

– освоение курсантами учебного материала посредством практических занятий (решение прикладных задач по соответствующей тематике) позволяет ослабить процесс «забывания» ими полученных знаний на 25 %, т. е. коэффициент $\delta = 0{,}25$;

– если в ходе педагогического процесса, допустим в часы самоподготовки, курсанты не повторяют изученный на занятиях материал, то он «забывается» на 5 % в день, т. е. коэффициент $\gamma = 0{,}05$.

Исходные данные для построения динамико-математической модели и решения с ее помощью задачи по поиску оптимального соотношения переменных педагогического процесса вводятся в среду математического пакета Mathcad (рисунок 1).

Динамическая система "хищник-жертва" (для педагогических технологий)

x - уровень знаний/навыков обучающегося (аналог "жертвы");

y - уровень забывания, усталости или стресса (аналог "хищников");
α - скорость естественного усвоения знаний (без нагрузки);
β - коэффициент подавления знаний из-за усталости/стресса;
γ - скорость естественного забывания (без повторения учебного материала);
δ - коэффициент закрепления знаний через практику.

$$\frac{d}{dt}x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x \cdot y$$ **x - "жертвы" - уровень знаний, далее, как x1.**

$$\frac{d}{dt}y = -\gamma \cdot y + \delta \cdot y \cdot x$$ **y - "хищники" - уровень забывания в результате усталости или стресса, далее, как x2.**

Значения коэффициентов: $\alpha := 0.1$ $\beta := 0.15$ $\gamma := 0.05$ $\delta := 0.25$

Рисунок 1 – Исходные данные для построения динамико-математической модели и решения с ее помощью задачи по поиску оптимального соотношения переменных педагогического процесса в среде математического пакета Mathcad

Figure 1 – Initial data for constructing a dynamic mathematical model and solving the problem of finding the optimal ratio of pedagogical process variables using the Mathcad mathematical package

На рисунке 2 представлены начальные значения переменных (x, y) и результат численного решения системы дифференциальных уравнений (2) методом Рунге-Кутта с помощью встроенной в Mathcad функции $rkfixed$ [21].

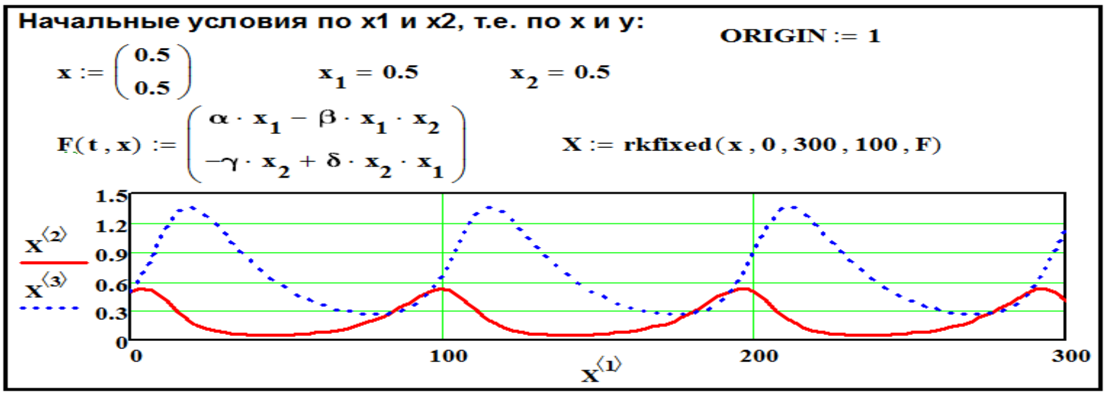

Рисунок 2 – Начальные условия переменных (x, y) и результат численного решения дифференциальных уравнений (2) методом Рунге-Кутта с помощью функции rkfixed в среде математического пакета Mathcad

Figure 2 – Initial conditions of the variables (x, y) and the result of the numerical solution of the differential equations (2) using the Runge-Kutta method with the rkfixed function in the Mathcad mathematical package environment

Для применения функции $rkfixed$, помимо начальных значений переменных, требуется еще задать вектор-функцию $F(t, X)$, которая представляет собой исходную систему дифференциальных уравнений (2), т. е. динамико-математическую модель педагогического процесса.

Полученный на рисунке 2 результат демонстрирует, что педагогический процесс имеет колебательный, периодически повторяющийся характер.

Понижение уровня внешних раздражителей (пунктирная линия) способствует улучшению освоения курсантами учебного материала (сплошная линия).

На рисунке 3 изображен фазовый портрет педагогического процесса, представляющий собой замкнутую кривую, окружающую одну стационарную точку. Принадлежащие фазовой кривой точки, характеризуют сочетание переменных $x(t)$ и $y(t)$, т. е. уровни интенсивности «приобретения» и «забывания» знаний курсантами. Ось ординат $X^{\langle 2 \rangle}$ – это интенсивность приобретаемых знаний $(x(t))$, а ось абсцисс $X^{\langle 3 \rangle}$ – интенсивность внешних раздражителей (при стрессовой ситуации), т. е. $y(t)$.

Рисунок 3 – Фазовый портрет педагогического процесса, иллюстрирующий соотношения переменных $X^{\langle 2 \rangle}$ и $X^{\langle 3 \rangle}$ ($x(t)$ и $y(t)$ соответственно), выполненный в среде математического пакета Mathcad

Figure 3 – Phase portrait of the pedagogical process, illustrating the relationship between the variables $X^{\langle 2 \rangle}$ and $X^{\langle 3 \rangle}$ ($x(t)$ and $y(t)$, respectively), created using the Mathcad mathematical package

Анализ динамико-математической модели позволяет сделать следующий вывод.

Точке стационарности педагогической системы соответствуют значения переменных: $x_{\text{ст.}} = 0{,}2$; $y_{\text{ст.}} = 0{,}67$.

Результат, полученный в результате моделирования системы, соответствует аналитическим расчетам. Чтобы избежать перегрузки, необходимо держать стресс $y_{\text{ст.}} < 0{,}67$.

Выводы:

1. Цикличность обучения подтверждается математически: периоды активного усвоения материала закономерно сменяются фазами забывания, что требует продуманного планирования учебной нагрузки.

2. Индивидуализация обучения становится возможной благодаря расчету персональных коэффициентов (α, β, γ, δ), отражающих скорость усвоения, влияние стресса и эффективность практики.

3. Прогнозирование результатов позволяет предотвратить перегрузку учащихся, поддерживая баланс между теорией, практикой и восстановлением.

4. Оптимизация методик обучения достигается за счет анализа точек равновесия модели и амплитуды колебаний показателей.

Перспективы дальнейших исследований:

– разработка программного обеспечения для автоматического сбора данных и расчета динамики обучения;

– адаптация моделей для разных образовательных контекстов (школа, вузы, онлайн-курсы);

– интеграция с нейронауками для учета физиологических параметров (уровень кортизола, активность мозга).

Использование математических моделей в педагогике переводит образовательные стратегии на качественно новый уровень, обеспечивая научно обоснованный подход к обучению и минимизацию когнитивных потерь. Дальнейшее развитие этого направления способно привести к созданию адаптивных образовательных систем, автоматически подстраивающихся под потребности каждого ученика. Это подчеркивает практическую значимость моделирования, обобщает выводы и намечает пути развития темы.

Заключение

Предложенная динамико-математическая модель, сформированная на системе дифференциальных уравнений, носит универсальный характер. Она позволяет описывать закономерности явлений и прогнозировать переменные (показатели) изучаемых процессов не только в педагогике, но и в любой другой предметной области, где наблюдается противостояние двух тенденций (военное противоборство, контрбатарейная борьба, борьба правоохранительных органов с преступностью, конкуренция в экономической сфере и т. п.). Следует отметить, что структурно динамико-математическая модель в виде Вальтера-Лотки может дополняться компонентами, учитывающими многообразие внешних факторов и особенности изучаемого явления.

Что касается образовательных процессов, то изменения исходных коэффициентов в модели Вальтера-Лотки (самая простая модель) позволяют выявить и визуализировать ключевые факторы, влияющие на эффективность образовательных процессов, предложить рекомендации по их оптимизации. Полученные результаты имеют практическое значение для образовательных учреждений, позволяя улучшить качество обучения и адаптировать образовательные программы к потребностям курсантов.

Список источников

1. Бакаэр Н. Краткая история математической динамики населения / Н. Бакаэр, В. А. Вольперт, Д. М. Эдиев. М., 2021. 244 с.

2. Котенко А. П. Аналитическое описание систем массового обслуживания с использованием колец вычетов / А. П. Котенко, М. Б. Букаренко // Математическое моделирование и краевые задачи: труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием, Самара, 03–06 июня 2010 года / Самарский государственный технический университет, Инженерная акад. России (Поволжское отделение) В. П. Радченко (ответственный редактор). Т. 2. Самара: Самарский государственный технический университет, 2010. С. 136–139.

3. Гороховский А. Н. Применение дифференциальных уравнений для моделирования экологических систем. М., 2023. 27 с.

4. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое движение // Странные аттракторы. М., 1981. С. 88–116.

5. Капица С. П. Математическая модель роста населения мира / С. П. Капица // Математическое моделирование. 1992. Т. 4, № 6. С. 65–79.

6. Капица С. П. Модель роста населения земли и предвидимое будущее цивилизации // Мир России. Социология. Этнология. 2002. Т. 11, № 3. С. 22–43.

7. Стронгин Р. Г. Исследование операций. Модели экономического поведения: учебник. М. : Интернет-Университет Информационных Технологий, 2007. 207 с.

8. Керимкул С. Е. Симуляция инфекционных заболеваний с помощью SIR моделей и опциональные свойства применяемых моделей / С. Е. Керимкул, М. Р. Галымжан // Central Asian Scientific Journal. 2022. № 2(6). С. 3–14.

9. Редуцированная модель SIR пандемии COVID-19 / С. И. Виницкий, А. А. Гусев, В. Л. Дербов [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, № 3. С. 400–412.

10. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15: учебное пособие. СПб. : Изд-во «Инфра-инженерия», 2024. 408 с.

11. Решение инженерных задач в пакете MathCAD: учебное пособие / под ред. Ю. Е. Воскобойникова. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2013. 120 с.

12. Arnsten (2009) Stress signalling pathways that impair prefrontal cortex structure and function. Nat Rev Neurosci. 10: 410-22.

13. Lupien, S. J. et al. Stress hormones and human memory function across the lifespan. Psychoneuroendocrinology 30, 2005. 225-242.

14. Morrison, M. A. (2013). Marketing and Managing Tourism Destinations (pp. 638-648).

15. By Eysenck, Michael W.,Derakshan, Nazanin,Santos, Rita,Calvo, Manuel G. Emotion, Vol 7(2), Anxiety and cognitive performance: Attentional control theory.May 2007, 336-353.

16. Vogel, S., & Schwabe, L. (2016). Learning and Memory under Stress: Implications for the Classroom. NPJ Science of Learning, 1, 16011.

17. Грачева Н. Г. Сетевое взаимодействие в образовательной организации // Морально-психологическое обеспечение деятельности органов внутренних дел: современные подходы и перспективы развития: материалы Всероссийской научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 05 декабря 2024 года. СПб. : Санкт-Петербургский университет МВД России, 2024. С. 89–93.

18. Грачева, Н. Г. Роль информационного общения в современном мире / // Язык. Культура. Общение: материалы Всероссийской научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 21 ноября 2024 года. СПб. : Санкт-Петербургский университет МВД Росии, 2024. С. 40–42.

19. Грачев М. И. Автоматизация организации и её техническое оснащение // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2024. № 5(77). С. 13–21.

20. Грачев М. И. Моделирование в целях оценки повышения эффективности управления предприятием // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2023. Т. 20, № 10(232). С. 31–37.

21. Кирьянов Д. В. Mathcad 15 / Mathcad Prime 1.0. СПб. : БХВ-Петербург, 2012 + Видеокурс. 432 с.

22. Коркмазов А. В. Личностно-смысловая характеристика дисциплины курсантов и слушателей, обучающихся в образовательных организациях МВД России / А. В. Коркмазов, Р. А. Кучмезов, А. Г. Бондарь // Евразийский юридический журнал. 2021. № 9(160). С. 487–488.

References

1. Bakaer N. Kratkaya istoriya matematicheskoj dinamiki naseleniya / N. Bakaer, V. A. Vol'pert, D. M. Ediev. M., 2021. 244 s. (In Russ.).

2. Kotenko A. P. Analiticheskoe opisanie sistem massovogo obsluzhivaniya s ispol'zovaniem kolec vychetov / A. P. Kotenko, M. B. Bukarenko // Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: trudy Sed'moj Vserossijskoj nauchnoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem, Samara, 03–06 iyunya 2010 goda / Samarskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet, Inzhenernaya akad. Rossii (Povolzhskoe otdelenie) V. P. Radchenko (otvetstvennyj redaktor). T. 2. Samara: Samarskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet, 2010. S. 136–139. (In Russ.).

3. Gorohovskij A. N. Primenenie differencial'nyh uravnenij dlya modelirovaniya ekologicheskih sistem. M., 2023. 27 s. (In Russ.).

4. Lorenc E. Determinirovannoe neperiodicheskoe dvizhenie // Strannye attraktory. M., 1981. S. 88–116. (In Russ.).

5. Kapica S. P. Mathematical model of global population growth / S. P. Kapica // Matematicheskoe modelirovanie. 1992. T. 4;6: 65–79. (In Russ.).

6. Kapica S. P. The model of global population growth and the predicted future of civilization // Mir Rossii. Sociologiya. Etnologiya. 2002. T. 11;3: 22–43. (In Russ.).

7. Strongin R. G. Issledovanie operacij. Modeli ekonomicheskogo povedeniya: uchebnik. M. : Internet-Universitet Informacionnyh Tekhnologij, 2007. 207 s. (In Russ.).

8. Kerimkul S. E. Simulation of infectious diseases using SIR models and optional properties of the applied models / S. E. Kerimkul, M. R. Galymzhan // Central Asian Scientific Journal. 2022;2(6): 3–14. (In Russ.).

9. Reduced SIR model of the COVID-19 pandemic/ S. I. Vinickij, A. A. Gusev, V. L. Derbov [i dr.] // ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 2021. T. 61;3: 400–412. (In Russ.).

10. Makarov E. G. Inzhenernye raschety v Mathcad 15: uchebnoe posobie. SPb. : Izd-vo «Infra-inzheneriya», 2024. 408 c. (In Russ.).

11. Reshenie inzhenernyh zadach v pakete MathCAD: uchebnoe posobie / pod red. YU. E. Voskobojnikova. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin), 2013. 120 s. (In Russ.).

12. Arnsten (2009) Stress signalling pathways that impair prefrontal cortex structure and function. Nat Rev Neurosci. 10: 410-22.

13. Lupien, S. J. et al. Stress hormones and human memory function across the lifespan. Psychoneuroendocrinology 30, 2005. 225-242.

14. Morrison, M. A. (2013). Marketing and Managing Tourism Destinations (pp. 638-648).

15. By Eysenck, Michael W.,Derakshan, Nazanin,Santos, Rita,Calvo, Manuel G. Emotion, Vol 7(2), Anxiety and cognitive performance: Attentional control theory.May 2007, 336-353.

16. Vogel, S., & Schwabe, L. (2016). Learning and Memory under Stress: Implications for the Classroom. NPJ Science of Learning, 1, 16011.

17. Gracheva N. G. Setevoe vzaimodejstvie v obrazovatel'noj organizacii // Moral'no-psihologicheskoe obespechenie deyatel'nosti organov vnutrennih del: sovremennye podhody i perspektivy razvitiya: materialy Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii, Sankt-Peterburg, 05 dekabrya 2024 goda. SPb. : Sankt-Peterburgskij universitet MVD Rossii, 2024. S. 89–93. (In Russ.).

18. Gracheva, N. G. Rol' informacionnogo obshcheniya v sovremennom mire / // YAzyk. Kul'tura. Obshchenie: materialy Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii, Sankt-Peterburg, 21 noyabrya 2024 goda. SPb. : Sankt-Peterburgskij universitet MVD Rosii, 2024. S. 40–42. (In Russ.).

19. Grachev M. I. Organization automation and its technical equipment // Uchenye zapiski Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2024;5(77): 13–21. (In Russ.).

20. Grachev M. I. Modeling for assessing the improvement of enterprise management efficiency // Vestnik komp'yuternyh i informacionnyh tekhnologij. 2023. T. 20;10(232): 31–37. (In Russ.).

21. Kir'yanov D. V. Mathcad 15 / Mathcad Prime 1.0. SPb. : BHV-Peterburg, 2012 + Videokurs. 432 s. (In Russ.).

22. Korkmazov A. V. Personal and semantic characteristics of the discipline of cadets and students studying at educational institutions of the Ministry of Internal Affairs of Russia / A. V. Korkmazov, R. A. Kuchmezov, A. G. Bondar' // Evrazijskij yuridicheskij zhurnal. 2021;9(160): 487–488. (In Russ.).

Информация об авторах

А. И. Примакин *– доктор технических наук, профессор*

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 08.07.2025;
одобрена после рецензирования 12.09.2025;
принята к публикации 17.09.2025.

Information about the authors

A. I. Primakin *– Doctor of Sciences (Technical), Professor*

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

The article was submitted 08.07.2025;
approved after reviewing 12.09.2025;
accepted for publication 17.09.2025.